12/5/17 Μάθημα 17ο

Φυλλάδιο 6

1) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

$\{r+\mathbb{Z} / 0\le r<1\} \xrightarrow{\phi} S^1$

$\phi(r) = e^{2\pi i r} = \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r$

2) α) $O(3) = \{A \in M(3\times 3, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$

→ γραμμικά πίνακες

$O(3) \subseteq GL(3,\mathbb{R})$

$A, B \in O(3)$

$B^{-1} \in O(3)$

$BB^t = I \Rightarrow B^{-1} = B^t$

$B^t (B^t)^t = I$?? $\Rightarrow B^t B = I \Rightarrow$

$\Rightarrow B^t B B^t = B^t \Rightarrow B^t I = B^t$ ισχύει

$AB \in O(3) \Rightarrow (AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AIA^t = I$

ισχύει

⇒ $AA^t = I \Rightarrow (\det A)^2 = \pm 1$

$\det A^t = \det A \qquad \det A = \pm 1 \Rightarrow$

$O(3)$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες

$SO(3) = \{A \in O(3) \mid \det A = 1\}$

$O(3) = SO(3) \cup (-1) SO(3)$

$SO(3) \triangleleft O(3)$

β) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in SO(3)$

$Y = \langle A, B \rangle \leq SO(3)$

$AA = I = BB \Rightarrow o(A) = o(B) = 2$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

Y γεννάται από δύο στοιχεία τάξης 2 τα οποία αντιμετατίθενται $\Rightarrow$ Y αβελιανή

$|Y| = ;$ η τάξη της;

$A^{\kappa} B^{\lambda} A^{\mu} A^{\omega}$ αντιμετατίθενται άρα $= A^{n} A^{m}$

$n = 0, 1$

$m = 0, 1$

Άρα υπάρχουν 4 επιλογές $\Rightarrow |Y| = 4 \Rightarrow Y \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

αρνηση

β) $|G| = pq$ p, q πρώτοι

$\exists !\ H \leq G$ με $|H| = p$

$\exists !\ K \leq G$ με $|K| = q$

α) $H \cap K = \{e\}$

$H \cap K \leq H, K \Rightarrow |H \cap K| \mid p$ και q $\left.\begin{matrix} \\ (p,q) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |H \cap K| = 1 \Rightarrow H \cap K = \{e\}$

$G \overset{?}{=} HK$ επειδή $HK \subseteq G$ και $|HK| \overset{??}{=} pq \Rightarrow$

$\Rightarrow G = HK$

$|HK| \leq pq$ Μήπως $|HK| < pq \Leftrightarrow h_1 k_1 = h_2 k_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{h_2^{-1} h_1}_{\in H} = \underbrace{k_2 k_1^{-1}}_{\in K} \in H \cap K = \{e\}$ $\textcircled{+}$

$h_2^{-1} h_1 = e$ και $k_2 k_1^{-1} = e \Rightarrow h_1 = h_2$ και $k_1 = k_2$

Άρα $|HK| = pq \Rightarrow HK = G.$

$\overset{(++)}{}$

$\forall h\in H,\ \kappa\in K \Rightarrow h\kappa=\kappa h \Leftrightarrow h\kappa h^{-1}=\kappa$

$h\kappa h^{-1}\in K$ και $o(h\kappa h^{-1})=o(\kappa)$

και K κυκλική τάξεως q άρα $h\kappa h^{-1}=\kappa \Leftrightarrow h\kappa=\kappa h$

$G\cong H\times K \cong \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\cong\mathbb{Z}_{pq}$ $(p,q)=1$

φτιάχνω έναν ισομορφισμό

$G=HK\to H\times K$

$g=h\kappa\mapsto(h,\kappa)$

Αν $h\kappa=h'\kappa' \overset{(+)}{\Rightarrow} h=h'$ και $\kappa=\kappa'$

Άρα γράφεται μοναδικά

$\phi(g=h\kappa)=(h,\kappa)$

$\phi(h\kappa h'\kappa')=\phi(h\kappa)\phi(h'\kappa')$

$\overset{(++)}{}$

$\phi(hh'\kappa\kappa')=(hh',\kappa\kappa')=(h,\kappa)(h',\kappa')$

π.χ. $G=pq$ όχι αβελιανή

$G=S_3$

4) $|G|=100$ αβελιανή $G\cong$;

$100=2^2\cdot5^2$

Αριθμός διαμερίσεων του 2

$2=2$ ή $2=1+1$ άρα 2

Άρα υπάρχουν $2\cdot2=4$ μη-ισόμορφες

$G_1\cong\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_{5^2}\cong\mathbb{Z}_{100}$

$G_2\cong\mathbb{Z}_{2^2}\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_5$

$G_3\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{5^2}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{50}$

$G_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$

5) $\mathbb{Z}_{36}/\langle18\rangle$

$\langle18\rangle \,/\, \langle36\rangle$

$\mathbb{Z}_{36}/\langle 18\rangle \Big/ \langle 9\rangle/\langle 18\rangle \cong \mathbb{Z}_9$

$\langle 18\rangle = \{0, 18\} \leq \mathbb{Z}_{36} = \{0, 1, \dots, 35\} \cong \mathbb{Z}_{18}$

$\mathbb{Z}_{36}/\langle 18\rangle = \{\alpha + \{0,18\} \mid 0 \leq \alpha \leq 17\}$

$(1+\{0,18\}) + (17+\{0,18\}) = 1+17+\{0,18\} = 18+\{0,18\} =$
$= \{0, 18\}$

$\langle 36\rangle = \{0\}$

$\langle 18\rangle/\langle 36\rangle = \langle 18\rangle = \{0, 18\} \cong \mathbb{Z}_2$

$\langle 9\rangle = \{0, 9, 18, 27\} \cong \mathbb{Z}_4$

$\langle 9\rangle/\langle 18\rangle = \{0+\{0,18\}, 9+\{0,18\}\} \cong \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_{36}/\langle 18\rangle \Big/ \langle 9\rangle/\langle 18\rangle = \left\{ \overset{\alpha}{0} + \{0,18\} + \{0+\{0,18\}, 9+\{0,18\}\} \;/\; \alpha = 0, 1, \dots, 8 \right\} \cong \mathbb{Z}_9$

Κυριο Ιδεωδες $I \trianglelefteq R$ και $I \neq R$

Πρωτο Ιδεωδες $I \trianglelefteq R$ και αν $r_1 r_2 \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow r_1 \in I$ ή $r_2 \in I$ (p πρωτος ή 0, $p\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$)

Μεγιστο Ιδεωδες I κυριο Ιδεωδες και <u>δεν</u> υπαρχ[ει]
κυριο Ιδεωδες J ωστε $I \subsetneq J$.

$\mathbb{Z}$: $\{0\}$ πρωτο $\not\Rightarrow$ μεγιστο: μεγιστο $p\mathbb{Z}$ p πρωτο[ς]
Εστω $k\mathbb{Z}$ να περιεχει το $p\mathbb{Z}$: $p \in p\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow p = k\alpha \Rightarrow k = p$
$\alpha = 1$.

Τα πρώτα είναι και μέγιστα??

$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ $\quad p\mathbb{Z}\oplus\{0\}$ πρώτο γιατί $(a,b)(a',b') \in$

$(aa',bb') \in p\mathbb{Z}\oplus\{0\} \Rightarrow p|a$ ή a', $\quad \mathbb{Z}\oplus\{0\}$

$b=b'=0$

$(a,b) = (pk,0) \in p\mathbb{Z}\oplus\{0\}$

$p\mathbb{Z}\oplus\{0\} \subseteq p\mathbb{Z}\oplus p\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$

Άρα $p\mathbb{Z}\oplus\{0\}$ πρώτο αλλά όχι μέγιστο

Θεώρημα: Αν R αντιμεταθετικός μοναδιαίος και $I \triangleleft R$, τότε R/I Α-Π $\Leftrightarrow$ I πρώτο

Θεώρημα (χωρίς απόδειξη): Αν R αντιμεταθετικός μοναδιαίος και $I \triangleleft R$ τότε R/I σώμα $\Leftrightarrow$ I μέγιστο.

π.χ. p πρώτος $\Leftrightarrow$ $p\mathbb{Z}$ μέγιστο ιδεώδες στο $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ σώμα.

Ομομορφισμός Δακτυλίων

Ορισμός: Μια απεικόνιση ϕ μεταξύ δακτυλίων R και R' καλείται ομομορφισμός δακτυλίων, αν:

$\phi: R \to R'$

$\phi(r \oplus_R r') = \phi(r) \oplus_{R'} \phi(r')$

$\phi(r \odot_R r') = \phi(r) \odot_{R'} \phi(r')$

π.χ. $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $\phi(n) = 0$

$\phi(nm) = 0 = 0\cdot 0 = \phi(n)\cdot\phi(m)$ Είναι

$\phi(0) = 0$ μοναδιαίο προσθέσεως

$\phi(1) = 0$ όχι μοναδιαίο πολ/μου

$\phi': \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $\phi(n) = n$ είναι

$\phi'': \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ με $\phi(n) = 2n$

$\phi(nm) = 2nm \neq 4nm = \phi(n)\phi(m)$

Θεώρημα: Έστω $\phi: R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων τότε:

1) $\phi(0_R) = 0_S$
2) $\phi(na) = n\phi(\alpha)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in R$
3) $\phi(\alpha^n) = (\phi(\alpha))^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
4) <u>Αν</u> οι R και S είναι μοναδιαίοι <u>και</u> $\phi(1_R) = 1_S$ τότε κάθε μονάδα του R απεικονίζεται σε μονάδα του S.

Επίσης $\phi(r^{-1}) = (\phi(r))^{-1}$ και $\phi(r^n) = (\phi(r))^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Πρόταση: Έστω $\phi: R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων
1) Αν η ϕ είναι επί τότε $\phi(1_R) = 1_S$
2) Αν ο S είναι διαιρετικός δακτύλιος <u>και</u> $\phi(1) \neq 0$ τότε $\phi(1_R) = 1_S$
3) Αν ο S είναι Α-Π και $\phi(1) \neq 0$ τότε $\phi(1_R) = 1_S$

<u>Απόδειξη:</u>

1) Αρκεί να δείξουμε ότι $s\phi(1) = \phi(1)s = s$ $\forall s \in S$

ϕ επί $\Rightarrow \exists r \in R$ με $\phi(r) = s$

$r \cdot 1 = 1 r = r \Rightarrow \phi(r \cdot 1) = \phi(1 \cdot r) = \phi(r)$

$\Rightarrow \phi(r)\phi(1) = \phi(1)\phi(r) = s \Rightarrow s \cdot \phi(1) = \phi(1) \cdot s = s$

2) S διαιρετικός $\Rightarrow$ Επειδή $\phi(1) \neq 0$. Άρα $\exists (\phi(1))^{-1}$

Ισχύει στον R ότι $1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \phi(1) \cdot \phi(1) = \phi(1) \Rightarrow$

$\phi(1)^{-1} \phi(1) \cdot \phi(1) = \phi(1)^{-1} \cdot \phi(1) \Rightarrow$

$1 \cdot \phi(1) = 1 \Rightarrow \phi(1) = 1$

3) Το 3) με τον ίδιο τρόπο όπως στο 2) αλλά χρησιμοποιούμε ότι δεν έχει μηδενοδιαιρέτες

Παρατήρηση: Όπως στους ομομορφισμούς ομάδων ορίζονται επι-, μονο-, ισομορφισμοί, το ίδιο γίνεται και στους δακτυλίους.

Πρόταση: 1) Η σύνθεση ισομορφισμών δακτυλίων είναι ομομορφισμός.
2) Η σύνθεση μονομορφισμών είναι μονομορφισμός.
3) Η σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμός.
4) Η σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός, και ο αντίστροφος ενός ισομορφισμού είναι ισομορφισμός.

π.χ. 1) $\phi: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$ με τύπο $\phi(\alpha \bmod 8) = \alpha \bmod 4$
Είναι επιμορφισμός δακτυλίων.

$\phi(\alpha+\beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta) \bmod 4$

$\phi(\alpha\cdot\beta) = \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta) \bmod 4$

$(\alpha+\beta) \bmod 4 = \alpha \bmod 4 + \beta \bmod 4 = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$

$(\alpha\cdot\beta) \bmod 4 = \alpha \bmod 4 \cdot \beta \bmod 4 = \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta)$

$\mathrm{Ker}\phi \overset{\text{σαν ομάδα}}{=} \{0,4\} = 4\mathbb{Z}_8 \overset{\text{υποομάδα}}{\leq} \mathbb{Z}_8$

$4\mathbb{Z}_8 \underset{\text{ιδεώδες}}{\trianglelefteq} \mathbb{Z}_8$

γιατί: $4\cdot a \in 4\mathbb{Z}_8$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_8$ ισχύει
θα είναι λ 0 ή 4 στο mod 8 και ισχύει πάντα

2) $R = \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$
$\phi: R \to R$ με $\phi(n+m\sqrt{2}) = n - m\sqrt{2}$
Η ϕ είναι ισομορφισμός
Εξετάζουμε τις ιδιότητες

3) $\phi: M(n\times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με τιμή $\phi(A) = \det A$
Ισχύει το γνωστό αλλά όχι το άθροισμα
$\phi(A+B) \neq \phi(A) + \phi(B)$
$\phi(A\cdot B) = \phi(A)\cdot\phi(B)$

Ορισμός: Έστω $I \trianglelefteq R$, τότε ορίζεται ο δακτύλιος πηλίκων: $R/_I = \{r+I \mid r \in R\}$ με πράξεις
$(r+I)+(r'+I) = (r+r')+I$ και
$(r+I)(r'+I) = rr'+I$.

Πρόταση: Έστω $\phi: R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων. Ορίζουμε τον πυρήνα της ϕ
$\ker\phi = \{r \in R$ με $\phi(r) = 0\}$. Τότε $\ker\phi \trianglelefteq R$

<u>απόδειξη:</u>
Προφανώς ο $\ker\phi$ είναι κανονική υποομάδα της R (αφού R είναι αβελιανή).
Θέλουμε αν $r \in R$ και $r' \in \ker\phi \Rightarrow rr', r'r \in \ker\phi$
$\phi(rr') = \phi(r)\phi(r') = \phi(r)\cdot 0_S = 0_S \Rightarrow$
$rr' \in \ker\phi$. Άρα $\ker\phi$ ιδεώδες στον R.
Ορίζεται λοιπόν το πηλίκο $R/\ker\phi$ το οποίο είναι δακτύλιος.

Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων
Αν $\phi: R \to S$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων τότε $R/_{\ker\phi} \cong \phi(R) \leq S$ δακτύλ.